

Tutorial

Hibridación de sistemas borrosos para el modelado y control

José Manuel Andújar*, Antonio Javier Barragán

Dep. de Ing. Electrónica, de Sistemas Electrónicos y Automática, Universidad de Huelva.
E.T.S.I., Ctra. Huelva-La Rábida s/n, 21819, Palos de La Frontera (Huelva).

Resumen

La lógica borrosa ha conseguido en un breve periodo de tiempo revolucionar la tecnología mediante la conjunción de los fundamentos matemáticos, la lógica y el razonamiento. Su inherente capacidad de hibridación y su robustez intrínseca han permitido a la lógica borrosa cosechar numerosos éxitos en el campo del modelado y el control de sistemas, impulsando el control inteligente. En este artículo se estudian los sistemas borrosos híbridos más usuales y su importancia en el campo del modelado y control de sistemas dinámicos. El trabajo presenta varios ejemplos que ilustran, para diferentes técnicas de hibridación, cómo éstas potencian las cualidades innatas de la lógica borrosa para el modelado y control de sistemas dinámicos. Así mismo, se incluyen más de ciento cincuenta referencias bibliográficas que permitirán al lector interesado profundizar en el campo de la lógica borrosa, y más concretamente en el de sus técnicas de hibridación con aplicación al modelado y control borroso. *Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.*

Palabras Clave: Algoritmos bioinspirados, control borroso, control inteligente, modelado borroso, redes neuronales, sistemas borrosos, sistemas híbridos

1. Introducción

En 1965, el profesor de teoría de sistemas de la Universidad de California (Berkeley), Lotfi A. Zadeh, publicó su famoso artículo *Fuzzy Sets* (Zadeh, 1965). En este trabajo presentó a la comunidad científica internacional la idea de *conjunto borroso*, y por extensión, de lo que se conocería como *lógica borrosa* (aunque parece ser una traducción que está en desuso, también hay autores que emplean el término *lógica difusa*). El trabajo precursor de la lógica borrosa fue el resultado de una idea, mencionada por el profesor Zadeh en 1962 (Zadeh, 1962), sobre la necesidad de crear un nuevo tipo de matemáticas, unas matemáticas que permitieran expresar el conocimiento humano en términos distintos a las distribuciones de probabilidad. Desde entonces, el término *lógica borrosa*, o *fuzzy logic*, ha sido empleado desde dos puntos de vista diferentes: por un lado, la forma estricta del término hace referencia a un sistema lógico que generaliza la lógica clásica para admitir el razonamiento impreciso o bajo incertidumbre; por el otro, en un sentido más

amplio y muy comúnmente utilizado, la lógica borrosa engloba todas las teorías y tecnologías que emplean conjuntos borrosos. En cualquier caso, la lógica borrosa ha conseguido en un breve periodo de tiempo revolucionar la tecnología e impulsar la inteligencia artificial mediante la conjunción de los fundamentos matemáticos, la lógica y el razonamiento.

Durante la primera década de vida de la lógica borrosa, los nacientes grupos de investigación fueron incorporando al campo borroso las estructuras matemáticas típicas, formalizando su desarrollo: relaciones, funciones, grafos, grupos, autómatas, gramáticas, lenguajes, algoritmos y programas. Así, Bellman y Zadeh (1970) trabajaron en sistemas de toma de decisión en entornos borrosos, Lakoff (1973) estudió el problema desde un punto de vista lingüístico, Goguen (1969) investigó sobre metodologías para la caracterización de estructuras matemáticas borrosas, Smith y Sugeno trabajaron en medidas borrosas (Smith, 1970, Sugeno, 1974), Dunn y Bezdeck en clasificación borrosa (Dunn, 1973, Bezdek y Dunn, 1975), Negoita (1969, 1974) en la recuperación de información borrosa y Zimmermann (1976) estudió la optimización borrosa. Desde España también hubo algunas aportaciones, como el estudio sobre la borrosificación algebraica y los sistemas topológicos realizados por los investigadores Sols y Meseguer (Meseguer y Sols, 1975, Sols, 1975).

* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: andujar@diesia.uhu.es (José Manuel Andújar), antonio.barragan@diesia.uhu.es (Antonio Javier Barragán)

Una de las características más importantes de la lógica borrosa, es que permite la utilización del lenguaje natural para representar el conocimiento sobre un sistema mediante lo que se denominan variables lingüísticas. Estas variables toman valores borrosos, valores definidos mediante conjuntos borrosos, los cuales son caracterizados por una etiqueta lingüística. De esta forma, el significado de una variable lingüística puede ser interpretado como una restricción elástica de su valor, es decir, un valor dotado de imprecisión. Esta característica permite la realización de modelos cualitativos de gran valor en diferentes campos del saber, debido fundamentalmente a su capacidad de reflejar de forma fácilmente interpretable fenómenos muy complejos y difícilmente modelables de forma analítica (Grande et al., 2005, Andújar et al., 2006a, Aroba et al., 2007, Jiménez et al., 2009).

Desde el punto de vista del control, S. Assilian y E. H. Mamdani, del Queen Mary College de Londres, establecieron en 1974 el primer hito en cuanto a aplicación industrial de la lógica borrosa, el ya histórico primer controlador borroso basado en reglas lingüísticas de un generador de vapor (Mamdani y Assilian, 1975). Este sistema de control basado en lógica borrosa fue uno de los frutos de la Tesis Doctoral de S. Assilian (Assilian, 1974), y supuso uno de los grandes impulsos que recibió la lógica borrosa en sus inicios, los cuales le permitieron pasar de un marco teórico a aplicaciones industriales reales en sólo unas décadas.

Desde el momento en el que la lógica borrosa se hizo popular a nivel industrial, se comprobó que el desarrollo de un controlador borroso con un buen rendimiento no era una tarea sencilla. La búsqueda de las funciones de pertenencia y las reglas adecuadas son un proceso tedioso de prueba y error, aún más en sistemas complejos. Además, era necesario poseer algún mecanismo de adaptación o aprendizaje que reajustase los controladores a las lentas modificaciones de los sistemas reales (desgastes, holguras, etc.). En este contexto, y con las redes neuronales ya bastante desarrolladas (Widrow, 1959, Rosenblatt, 1962, Anderson et al., 1977, Hopfield, 1982, Grossberg, 1987, Kohonen, 1988), los eficientes algoritmos de aprendizaje de las redes neuronales se presentaron como la solución ideal para automatizar este proceso de diseño. Así, Hayashi y Takagi (1988) desarrollaron el primer algoritmo que empleó una red neuronal para diseñar las funciones de pertenencia de un modelo borroso, creando el primer sistema neuro-borroso. La hibridación de estas dos técnicas se impulsó notablemente a principio de la década de los 90 con los trabajos de Jang (1991, 1992, 1993), Lin y Lee (1991), y Berenji y Khedkar (1992). Desde entonces los sistemas neuro-borrosos han permitido combinar la capacidad de adaptabilidad de las redes neuronales con la interpretabilidad y robustez intrínseca de los sistemas borroso (Pok y Xu, 1994, Vélez et al., 2010). Pero esta no es la única hibridación a la que se ha sometido a la lógica borrosa, también se ha integrado con algoritmos genéticos y bioinspirados (*evolutionary computing*), con técnicas probabilísticas (*probabilistic computing*), y con las herramientas tanto clásicas, como el consagrado PID (Ying et al., 1990, Zhao et al., 1993, Santos et al., 1996, Mudi y Pal, 1999, Tang et al., 2001), como modernas de la teoría de control (Albertos y Sala, 2004), convirtiéndose en una de las

herramientas principales del denominado *Control Inteligente*¹.

Los sistemas borrosos híbridos permiten suplir algunas de las carencias de la lógica borrosa o mejorar su desempeño mediante la aplicación de otras técnicas. Estos sistemas han demostrado su utilidad en una amplia variedad de problemas reales (Takagi, 1995, 1996, Santos, 2011), y su uso ha aumentado vertiginosamente en los últimos años.

En este artículo se hace un recorrido por algunos de los distintos sistemas borrosos híbridos y su importancia en el campo del modelado y control de sistemas dinámicos. Se ha hecho más hincapié en la revisión y recopilación bibliográfica que en la extensión del artículo, con objeto de no hacerlo innecesariamente largo, y entendiendo que el lector interesado sabrá encontrar en la bibliografía aportada lo que busca. No obstante, sí se ha prestado especial atención a ilustrar el artículo con varios ejemplos de cómo se aplican las técnicas de hibridación en el modelado y control borroso. En la primera sección de este trabajo se trata el surgimiento de las técnicas neuroborrosas y varias de sus configuraciones. A continuación se muestran algunas de las características de las hibridaciones de los sistemas borrosos con los bioinspirados. Posteriormente se presenta el concepto de control inteligente junto con varios de sus principales logros. Finalmente se presentan algunos ejemplos y conclusiones.

2. Sistemas borrosos y redes neuronales

Las redes neuronales tratan de imitar el funcionamiento interno del cerebro humano mediante la aplicación del concepto de neurona artificial, un modelo simplificado e idealizado de una neurona biológica, y su interconexión, también idealizada, en una red neuronal (McCulloch y Pitts, 1943, Rosenblatt, 1958). Esta red aúna el procesamiento individual de las neuronas artificiales en un único sistema con capacidad de aprendizaje para inferir funciones complejas. Las ventajas principales de las redes neuronales artificiales son su capacidad de aprendizaje y generalización, pero adolecen de una falta de interpretabilidad de la información almacenada, siendo un ejemplo de lo que se conoce como modelo de caja negra.

Las redes neuronales artificiales y la lógica borrosa son dos tecnologías complementarias, ya que la conjunción de la capacidad de aprendizaje de las redes neuronales con la habilidad de procesamiento de predicados vagos de la lógica borrosa, proporciona un marco formal cercano a la forma de razonamiento del ser humano (Takagi y Hayashi, 1991, Jang y Sun, 1995). La hibridación de las redes neuronales artificiales junto con la lógica borrosa proporciona un sistema inteligente híbrido denominado sistema neuroborroso (*Neuro-Fuzzy System, NFS*). Los sistemas neuroborrosos han atraído un creciente interés de la comunidad científica e ingenieril por su capacidad para resolver problemas complejos reales (Gupta, 2000, Gajate, 2010). Su cualidad principal es la de ser aproximadores universales con capacidad de aprendizaje, como las redes neuronales, pero

¹El término control inteligente se emplea para denominar a la aplicación de las diferentes técnicas de inteligencia artificial a los problemas de control.

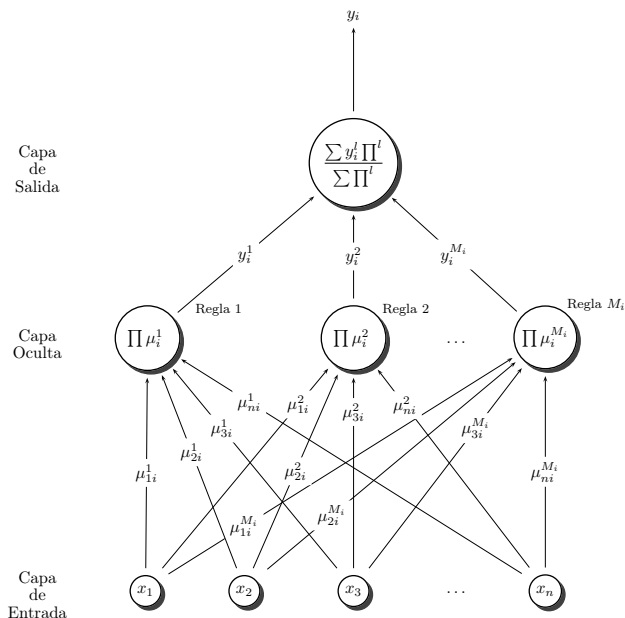


Figura 1: Red neuronal equivalente a un modelo borroso.

con la habilidad adicional de ofrecer reglas *Si-Entonces* interpretables, las cuales permiten dar significado lingüístico a los datos almacenados por el sistema.

Una de las posibles combinaciones de redes neuronales junto con lógica borrosa consiste en emplear una red neuronal para la determinación de los antecedentes y consecuentes del modelo borroso. Como se puede observar en la figura 1, un sistema borroso puede representarse como una red neuronal de flujo directo de 3 capas hacia adelante (Zadeh, 1973, Nomura et al., 1993), esto es, un perceptrón de 3 capas (Wang, 1994). La primera capa representa la capa de entrada, y en ella se sitúan todas las entradas del sistema, x_1, \dots, x_n . Para cada una de las salidas, y_i , los datos de cada entrada, la k -ésima por ejemplo, son ponderados entre la capa de entrada y la capa intermedia, o capa oculta, a través de las funciones de pertenencia correspondientes a cada regla l , μ^l_{ki} . La capa oculta se conecta con la capa de salida mediante el consecuente correspondiente a cada regla $l = 1..M_i$ para la salida i -ésima. Finalmente, la capa de salida calcula la salida y_i del modelo neuroborroso. Nótese como cada nodo de una capa está conectado a cada nodo de la capa siguiente, tal como sucede en un perceptrón de tres capas. Naturalmente, el comportamiento de los nodos y las sinapsis en el sistema de la figura 1 no son iguales que en el perceptrón. Sin embargo, este símil permite emplear los algoritmos de adaptación de las redes neuronales en sistemas borrosos. Así, entre otros, es de aplicación a la identificación de modelos borrosos (Horikawa et al., 1992, Wang y Mendel, 1992) el conocido algoritmo de *backpropagation* (BP) o retropropagación, uno de los más importantes algoritmos de aprendizaje de las redes neuronales.

El algoritmo BP es un algoritmo de aprendizaje supervisado que consiste en minimizar el error de estimación (comúnmente cuadrático) por medio de gradiente descendente, por lo que

la parte esencial del algoritmo es el cálculo de las derivadas parciales de dicho error con respecto a los parámetros del modelo. En una red neuronal (Yen y Langari, 1999), el algoritmo BP realiza dos pasadas a través de las diferentes capas de la red, una hacia delante y otra hacia atrás. En la primera pasada (hacia adelante), se aplica un vector de entrada a los nodos de entrada de la red, propagándose su efecto capa a capa a través de la misma. Durante esta fase los pesos sinápticos permanecen fijos. Después de la última capa se obtiene, como consecuencia del vector de entrada introducido, un vector respuesta. Durante la segunda pasada (hacia atrás), todos los pesos sinápticos se ajustan en función de una regla de corrección del error (una generalización de la regla delta del algoritmo de aprendizaje de Widrow y Hoff (1989)). La señal de error resultante, entendiendo por señal de error la diferencia entre la respuesta de salida de la red y la deseada, se propaga entonces hacia atrás, en sentido contrario a las conexiones sinápticas. Este método de ajuste de pesos se repite hasta conseguir la convergencia del algoritmo de aprendizaje.

En el caso de un modelo borroso, la aplicación del algoritmo BP funciona en la pasada hacia delante de forma análoga a la red neuronal, sólo que en vez de permanecer fijos los pesos sinápticos, se mantienen sin cambio los parámetros del antecedente y el consecuente de las reglas. En la pasada hacia atrás, la señal de error resultante se propaga para ajustar los parámetros del modelo según la regla de corrección del error. Si se define $J(k)$ como la función de coste, error cuadrático medio, su expresión vendrá dada en la k -ésima iteración del algoritmo por:

$$J(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y_i(k) - \hat{y}_i(k))^2 \tag{1}$$

donde $y_i(k)$ es la i -ésima salida real en la k -ésima iteración e $\hat{y}_i(k)$ la i -ésima salida estimada.

A partir de la función de ajuste que implementa el método de gradiente descendente (2) (Freeman y Skapura, 1991), se pueden obtener las expresiones de adaptación paramétrica tanto de los antecedentes como de los consecuentes de las reglas (Andújar et al., 2006b):

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \eta \left. \frac{\partial J(k)}{\partial \theta(k)} \right|_{\theta=\theta(k)} \tag{2}$$

En la expresión anterior, $\theta(k)$ es el parámetro a adaptar y η es un factor de escala del término derivativo, denominado factor de aprendizaje del algoritmo, el cual afecta al tiempo de convergencia del mismo.

Para mejorar la eficiencia del proceso de identificación, el factor de aprendizaje puede hacerse adaptativo (Mościński y Ogonowski, 1995), siendo en este caso:

$$\eta(k+1) = \begin{cases} \Delta\eta \times \eta(k) & \text{si } J(k) \leq J(k-1) \\ \nabla\eta \times \eta(k) & \text{si } J(k) \geq r \times J(k-1) \\ \eta(k) & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{3}$$

donde r , $\Delta\eta$ y $\nabla\eta$ son valores ajustables definidos como margen de tolerancia y momentos, respectivamente.

Otro de los algoritmos neuroborrosos más representativos es ANFIS (Jang, 1993), acrónimo de *Adaptive Network based*

Fuzzy Inference System. El algoritmo ANFIS consiste en una red neuronal de 6 capas que representa un modelo borroso de tipo Takagi-Sugeno (TS), donde la primera y última capa se corresponden respectivamente con las entradas y salidas del sistema borroso. La segunda capa define las particiones borrosas en el dominio de discurso de las entradas, es decir, las funciones de pertenencia del modelo. La tercera y cuarta capa constituyen los antecedentes de cada una de las reglas, mientras que la quinta calcula su consecuente TS. Al igual que el algoritmo BP, ANFIS emplea una estrategia de retropropagación de los errores para adaptar los antecedentes de las reglas, pero en este caso los consecuentes son ajustados mediante el método de los mínimos cuadrados (Gajate y Haber, 2009). El algoritmo de ajuste puede dividirse en dos pasos. En el primero, hacia adelante, se calculan los consecuentes óptimos manteniendo constantes los antecedentes; mientras que en la segunda pasada, hacia atrás, son los consecuentes los que permanecen constantes para realizar el ajuste, ahora por el método del gradiente descendente (Werbos, 1974, LeCun, 1985, Parker, 1985).

La técnica de los sistemas neuroborrosos evoluciona constantemente y aún se siguen desarrollando nuevas metodologías de hibridación que permiten mejorar sus características. Una de las tendencias actuales son los denominados sistemas neuroborrosos evolutivos², o *evolving neurofuzzy systems* (Chiu, 1994, Angelov y Buswell, 2002, Angelov, 2002), especialmente los sistemas evolutivos Takagi-Sugeno (eTS) (Angelov et al., 2004, Angelov y Filev, 2004, Lughofer, 2008). Este tipo de sistemas se caracterizan porque su estructura se modifica a lo largo del tiempo mediante un sistema de agrupamiento en línea, a diferencia de los sistemas neuroborrosos comentados con anterioridad donde únicamente se modifican los valores de sus parámetros.

3. Sistemas borrosos y algoritmos bioinspirados

Los algoritmos bioinspirados se han mostrado como uno de los campos de investigación más prometedores en el desarrollo de metaheurísticas. Estos algoritmos permiten el tratamiento de problemas no lineales multidimensionales altamente complejos, y poseen un comportamiento bastante robusto; sin embargo, adolecen de rapidez de convergencia (Bonissone et al., 1999). La hibridación de los algoritmos bioinspirados, especialmente los algoritmos genéticos, junto con la lógica borrosa, permite crear sistemas con la capacidad de razonamiento aproximado y robustez de los sistemas borrosos, con las características de aprendizaje propias de los algoritmos bioinspirados (Karr et al., 1989, Cerdón et al., 2004). Este tipo de sistemas híbridos se caracterizan por permitir tanto el modelado de sistemas complejos en base a datos de entrada/salida, como la sintonización de controladores borrosos (Karr, 1991, Cerdón et al., 1995).

Dentro de estas metaheurísticas se encuentran también los algoritmos de optimización basados en colonias de hormigas

²No hay que confundir este tipo de sistemas con aquellos que emplean algoritmos genéticos o bioinspirados (computación evolutiva) para la adaptación de sus parámetros.

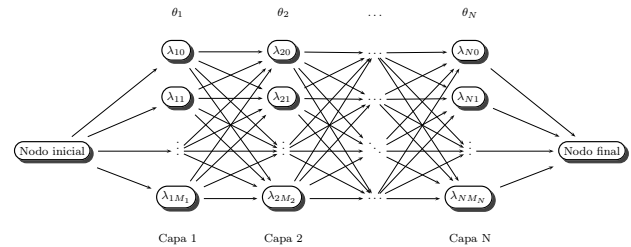


Figura 2: Grafo para el ajuste de modelos borrosos TS mediante OCH.

(OCH) (Dorigo et al., 1996, 1999). La metaheurística OCH se basa en simular la forma en que las hormigas trazan caminos de longitud mínima. En el proceso de búsqueda, las hormigas depositan una sustancia denominada feromona, y en base a esta sustancia dirigen su búsqueda. En las intersecciones el camino se elige de modo probabilístico en función de la feromona depositada, de forma que los caminos más cortos son más frecuentados, por lo que reciben mayor cantidad de feromona y se acaba obteniendo un camino de longitud mínima. Dependiendo del problema, la longitud del camino vendrá definida por una función de coste a minimizar, y los nodos representarán valores posibles de los parámetros.

La hibridación de la metaheurística OCH con los sistemas borrosos permite ajustar los parámetros de éstos de forma rápida y eficiente (Jensen y Shen, 2005, Han y Shi, 2007, Juang et al., 2008). Para aplicar los algoritmos OCH al modelado borroso TS se emplea un grafo, ver figura 2, donde cada capa se asocia con un parámetro del modelo TS, θ_i , y se compone por un conjunto de nodos que representan los valores posibles de dicho parámetro, λ_{ij} (Andújar et al., 2006b). Cada nodo de una capa se conecta con todos los nodos de la capa siguiente. De esta forma, el ajuste de los parámetros del modelo TS puede ser interpretado como el recorrido de las hormigas por el grafo. Cada nodo recorrido por una hormiga indica la elección de un valor para cada uno de los parámetros del modelo borroso, por lo que cada camino completo es un modelo candidato. Aunque los valores posibles de los parámetros en el algoritmo OCH estén discretizados, una vez éste converge se puede emplear un algoritmo de búsqueda local para refinar el modelo y mejorar su respuesta.

4. El control inteligente

Se suele entender por control inteligente aquellas aplicaciones de control que emplean alguna de las técnicas propias de inteligencia artificial, esto es, fundamentalmente: redes neuronales, lógica borrosa y algoritmos bioinspirados. El uso masivo de las técnicas de inteligencia artificial en el modelado de procesos, y sobre todo en la monitorización y el control, ha sido consecuencia de que, en buena medida, las técnicas clásicas no han producido los resultados deseados (Gajate, 2010). Además, las prestaciones de los reguladores clásicos se deterioran considerablemente en presencia de incertidumbres y de no linealidades. Cuando el modelo matemático de una planta no lineal es conocido, existen muchas técnicas de control que permiten

garantizar la estabilidad del mismo, con resultados probados y avalados por la comunidad científica. Sin embargo, si el modelo de la planta es desconocido, o es demasiado complejo como para obtenerlo, o está sometido a incertidumbres, el control inteligente, y dentro de éste el borroso, se presenta como una herramienta poderosa, posiblemente una de las mejores, para afrontar el diseño del controlador no lineal (Albertos y Sala, 2004, Andújar y Bravo, 2005, Barragán, 2009).

Aunque el control inteligente no implique necesariamente la utilización de la lógica borrosa, su capacidad para el tratamiento de sistemas complejos o con incertidumbres, generalmente no formulables mediante modelos matemáticos clásicos, ha hecho de ésta una de las herramientas más utilizadas. Esto es así fundamentalmente porque la lógica borrosa se ha hibridado con las técnicas propias de la teoría de control en todos sus ámbitos: modelado, análisis y control. Por ejemplo, respecto al modelado de sistemas, además de las metodologías neuro-borrosas y las hibridaciones con técnicas bioinspiradas comentadas en los apartados anteriores, se han desarrollado algoritmos de modelado borroso basados en el filtro de Kalman (Simon, 2002, Barragán et al., 2013), los cuales permiten tratar sistemas afectados por ruidos; algoritmos de agrupamiento (*clustering*) borroso (Sugeno y Yasukawa, 1993, Bezdek et al., 1984, Xie y Beni, 1991), incluso máquinas de vectores soporte (*Support Vector Machines*) basadas en lógica borrosa (Lin y Wang, 2002).

Desde el punto de vista del análisis y el control, aunque el control borroso nació como una metodología heurística (Zadeh, 1973, Mamdani, 1974, 1977), que aún sigue empleándose por su utilidad (Andújar et al., 2007), la comunidad científica ha realizado un gran esfuerzo de formalización, fundamentalmente a partir de la década de los 90. Esto ha permitido dotar al control borroso de una base formal centrada en la teoría de control no lineal (Piegat, 2001, Al-Hadithi et al., 2007). Inicialmente se incorporaron los métodos clásicos: el criterio de hiperestabilidad de Popov (Li y Yonezawa, 1991, Piegat, 1997, Wang y Langari, 1994), el criterio del círculo (Driankov et al., 1993, Lin y Wang, 1998), las técnicas de análisis en el espacio de fase (Maeda y Murakami, 1991, Driankov et al., 1993), y el método de la función descriptiva (Aracil, 2000). Posteriormente se han incorporado otras técnicas inspiradas en las herramientas del control no lineal (Cao y Frank, 2000, Andújar y Barragán, 2010, Al-Hadithi et al., 2013), métodos basados en la teoría de estabilidad de entrada/salida (Lin y Wang, 1998, Malki et al., 1994, Aracil, 2000), en índices de estabilidad y robustez de sistemas (Aracil et al., 1989, Aracil, 2000), en técnicas de aritmética intervalar (Bravo et al., 2002, Andújar et al., 2004), métodos basados en la teoría de estabilidad de Lyapunov (Tanaka y Sugeno, 1992, Nguyen et al., 1995, Feng et al., 2002, Andújar y Barragán, 2005, Andújar et al., 2009), y soluciones en base a desigualdades matriciales lineales (*Linear Matrix Inequalities – LMI*) (Wang et al., 1996, Tanaka et al., 1998, Tanaka y Wang, 2001, Sala y Ariño, 2009), entre otros.

Los sistemas de control inteligente, y más específicamente los basados en lógica borrosa, han demostrado su utilidad en una amplia variedad de problemas reales (Takagi, 1995, 1996, Santos, 2011). Actualmente son muchos los aparatos de consu-

mo que incluyen algún tipo de controlador borroso. Por ejemplo, desde hace tiempo, tanto las cámaras fotográficas como las de vídeo emplean frecuentemente un controlador borroso para realizar el enfoque automático o el ajuste del tiempo de exposición (Haruki y Kikuchi, 1992, Yongman et al., 1994, Chen et al., 1995). También muchos de los electrodomésticos de uso cotidiano la emplean en sus sistemas de control para ahorrar energía o agua (Hofbauer et al., 1993, Steinmüller y Wick, 1993, Ferrer et al., 1998), mejorando considerablemente su eficiencia. La industria del automóvil es otro de los sectores donde se ha aplicado la lógica borrosa con mucho éxito (Altrock et al., 1992, Altrock, 1994). Se han aplicado controladores borrosos en sistemas de suspensión activa (Cherry y Jones, 1995, Rao, 1997), en sistemas de frenado (Layne et al., 1993, Mauer, 1995, Kim et al., 1996, Lennon y Passino, 1999, Lee y Zak, 2002) y en el control electrónico de motores (Vachtsevanos et al., 1993). Con la acuciante necesidad de eliminar la dependencia del petróleo, casi todos los fabricantes tienen abiertas líneas de investigación sobre vehículos híbridos. En este campo tan novedoso y competitivo, también está triunfando la lógica borrosa como un excelente método de control, y son numerosos los avances que se están consiguiendo gracias al control borroso (Lee y Sul, 1998, Baumann et al., 2000, Schouten et al., 2002, Won y Langari, 2002).

En definitiva, la diversidad de tecnologías que pueden hibridarse con la lógica borrosa, junto con su potencial y flexibilidad, hacen que esta técnica de modelado y control posea múltiples campos de aplicación en muy diversos ámbitos, y que a nivel de investigación sigan produciéndose avances y nuevas propuestas constantemente.

5. Ejemplos

En este apartado se presentan varios ejemplos de casos de éxito de la hibridación de la lógica borrosa con las distintas técnicas presentadas en el artículo. Se hará especial hincapié en las referencias bibliográficas necesarias para que el lector profundice en ellas si lo considera necesario.

5.1. Modelado borroso de sistemas afectados por ruido

Para poder estudiar la dinámica de un sistema es de gran interés obtener un modelo adecuado del mismo. Sin embargo, no siempre se posee la información necesaria para poder obtener un modelo matemático, lo que hace necesario acudir a técnicas de modelado basadas en datos de entrada/salida (López-Baldán et al., 2002). Este requerimiento es incluso más crítico en sistemas de control, ya que es necesario obtener un modelo suficientemente preciso tanto para el análisis del sistema como para el diseño de su controlador.

Los modelos borrosos de tipo TS son aproximadores universales (Wang, 1992, Kosko, 1994, Ying, 1998, Zeng et al., 2000), lo que les permite obtener modelos altamente precisos con un número reducido de reglas (Wang, 1997). Existen en la literatura numerosos algoritmos que permiten el modelado de sistemas TS en base a datos de entrada/salida (Horikawa et al., 1992, Jang, 1993, Babuška, 1995, Denai et al., 2007), sin embargo,

en muchas circunstancias se requiere también que el algoritmo de modelado sea capaz de funcionar en línea con el proceso, así como que funcione adecuadamente en presencia de ruido. Bajo esta casuística, el filtro de Kalman se presenta como una alternativa ideal para el modelado en base a datos de entrada/salida, ya que no sólo cumple dichas premisas, sino que lo hace con una eficiencia computacional adecuada.

El filtro de Kalman fue desarrollado por Rudolph E. Kalman en 1960 (Kalman, 1960), y permite construir un observador óptimo para sistemas lineales en presencia de ruido blanco. El filtro de Kalman es un filtro recursivo y eficiente que estima los estados internos de un sistema lineal a partir de una serie de medidas afectadas por ruido; además, presenta una característica muy deseable en un algoritmo de modelado, como es la consistencia del modelo con los datos de iteraciones previas. Este filtro es utilizado en un amplio rango de aplicaciones industriales, y es una técnica ampliamente conocida y utilizada en el ámbito del control. Para estimar los estados de un sistema no lineal se pueden emplear varias modificaciones del filtro de Kalman, como el filtro de Kalman extendido (EKF) (Maybeck, 1979), el cual se basa en la linealización del sistema en torno al valor actual de sus parámetros.

El filtro de Kalman se ha utilizado junto con la lógica borrosa en diversas aplicaciones, como en la extracción de reglas a partir de una base de reglas dada (Liang y John, 1999), en optimización de los parámetros de mecanismos de defuzificación basados tanto en distribuciones Gaussianas como polinómicas (Jiang y Li, 1996), o en la optimización de los consecuentes de modelos Takagi-Sugeno (Ramaswamy et al., 1993). En 2002, Simon introdujo el uso del filtro de Kalman para la adaptación de los parámetros de un modelo borroso (Simon, 2002), siendo generalizada dicha idea en (Barragán et al., 2013) para modelos TS completamente generales y sin restricciones en el tamaño de los vectores de entrada/salida, ni tampoco en el tipo o distribución de las funciones de pertenencia elegidas en la definición de los conjuntos borrosos del modelo.

Si se considera un sistema discreto no lineal de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{e}(k), \end{aligned} \tag{4}$$

donde $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{e}(k)$ son ruidos blancos que representan la incertidumbre en el modelo de la ecuación de estado y salida, respectivamente, y siendo las matrices jacobianas del sistema:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k), \mathbf{u}=\mathbf{u}(k)} \tag{5}$$

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k), \mathbf{u}=\mathbf{u}(k)} \tag{6}$$

y

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}(k)) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k)} \tag{7}$$

el EKF puede resolverse mediante la aplicación iterativa del siguiente conjunto de ecuaciones (Grewal y Andrews, 2001):

Predicción:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{\Phi}(k)\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{\Gamma}(k)\mathbf{u}(k) \tag{8}$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{\Phi}(k)\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{\Phi}^T(k) + \mathbf{R}_v \tag{9}$$

Corrección:

$$\mathbf{K}(k) = \left(\mathbf{\Phi}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}_{ve} \right) \left(\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}_e \right)^{-1} \tag{10}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k|k) &= \mathbf{\Phi}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{\Phi}^T(k) + \mathbf{R}_v \\ &\quad - \mathbf{K}(k)\left(\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{\Phi}^T(k) + \mathbf{R}_{ve}^T\right), \end{aligned} \tag{12}$$

donde $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ y $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ representan, respectivamente, la estimación del estado \mathbf{x} a priori y la estimación actualizada a posteriori dadas las observaciones actuales, e incluyendo el instante k . $\mathbf{P}(k|k-1)$ es la estimación de la matriz de covarianza a priori, y $\mathbf{P}(k|k)$ es la estimación actualizada de la matriz de covarianza a posteriori. $\mathbf{K}(k)$ es la ganancia de Kalman, $\hat{\mathbf{y}}(k)$ la estimación de la salida, y \mathbf{R}_v , \mathbf{R}_{ve} y \mathbf{R}_e son las matrices de covarianza del ruido, calculadas a partir del operador esperanza.

Una vez inicializado el filtro, éste evoluciona en línea con el sistema obteniendo una solución que minimiza tanto el error de estimación, como la matriz de covarianza del mismo para la linealización obtenida en cada instante. Si el sistema es completamente desconocido y no se posee una estimación inicial de $\hat{\mathbf{x}}(0)$, éste suele inicializarse con un valor arbitrario, en cuyo caso, la matriz de covarianza debe inicializarse como la matriz identidad multiplicada por un factor positivo elevado, denominado α o β según se refieran a los consecuentes o los antecedentes, respectivamente, el cual indica la poca certeza que se posee sobre el valor inicial de $\hat{\mathbf{x}}(0)$.

Una aplicación del EKF consiste en la identificación adaptativa de parámetros en sistemas no lineales, lo cual permite la obtención en línea del conjunto de parámetros adaptables de un modelo no lineal discreto en presencia de ruido y de forma pseudo-óptima (es óptima para sistemas lineales). La identificación de un modelo borroso TS puede verse como la obtención de los parámetros de un modelo no lineal, por lo que puede ser aplicado el filtro de Kalman a través del algoritmo extendido para la estimación de dichos parámetros. En primer lugar se debe plantear el problema de estimación mediante el EKF, construyendo un sistema cuyos estados sean los parámetros a estimar, para posteriormente aplicar recursivamente las ecuaciones (8) a (12).

Sea $\mathbf{p}(k)$ el conjunto de parámetros a estimar del sistema borroso, e $\mathbf{y}(k)$ el conjunto de salidas del mismo, el sistema representado en la figura 3 permite la obtención de dichos parámetros mediante el sistema (13) y la aplicación del filtro de Kalman extendido.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(k+1) &= \mathbf{p}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{p}(k)) + \mathbf{e}(k) \end{aligned} \tag{13}$$

El conjunto de parámetros, $\mathbf{p}(k)$, es el vector de estado del sistema (13), y $\mathbf{h}(\mathbf{p}(k))$ es el modelo borroso cuyos parámetros se desean adaptar. La señal $\mathbf{e}(k)$ es la incertidumbre de la medida de la salida del sistema, y viene representada por un ruido blanco de covarianza \mathbf{R}_e . Las matrices jacobianas (5), (6) y (7) para el sistema (13) fueron obtenidas de forma completamente

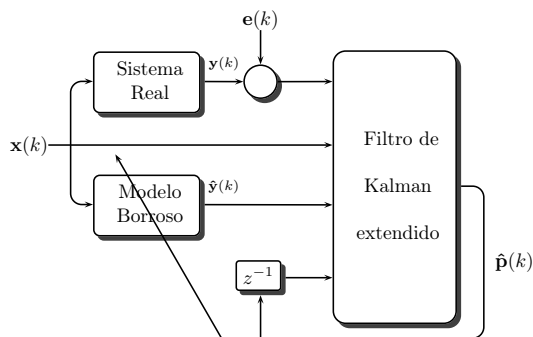


Figura 3: Esquema de modelado borroso mediante EKF.

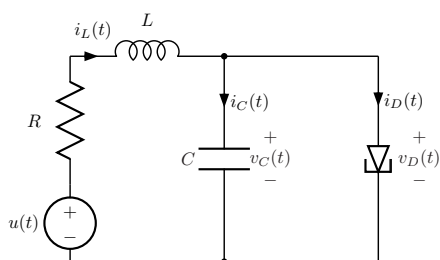


Figura 4: Circuito diodo túnel.

general en (Barragán et al., 2013), donde también se presentan varios algoritmos para su aplicación al modelado TS.

A continuación se muestra un ejemplo de aplicación práctica del modelado borroso mediante EKF. Sea el circuito diodo-túnel mostrado en la figura 4, donde $R = 1,5 \text{ k}\Omega$, $C = 2 \text{ pF}$ y $L = 5 \text{ }\mu\text{H}$, $x_1(t) = v_C(t)$, $x_2(t) = i_L(t)$ las variables de estado del sistema, $T = 0,1 \text{ ns}$ el tiempo de muestreo, y $h(v)$ la característica $v_D - i_D$ no lineal del diodo-túnel (Chua et al., 1987).

Se considera que el sistema está afectado por un ruido blanco $e(k)$ de covarianza:

$$\mathbf{R}_e = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0,01 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

y el estado inicial es $\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La señal de entrada aplicada al sistema es

$$u_{tr}(k) = \frac{20 \sin(kT/10)}{(kT + 10)},$$

para el proceso de entrenamiento, y

$$u_{te}(k) = \frac{10 \sin((kT + 10)/5)}{(kT + 15)},$$

para la validación. Durante el proceso de validación se eliminará el ruido para que el error de validación muestre la calidad del modelo obtenido sin perturbaciones.

Para probar la respuesta del algoritmo en función de los valores asignados a los parámetros de inicialización de la matriz de covarianza, α y β , se han realizado varias ejecuciones para distintos valores de dichos parámetros (ver tabla 1). Con la intención de mitigar el efecto que el ruido puede causar en los

errores de modelado, cada una de las pruebas se ha realizado 10 veces. Al ser el sistema dinámico, las entradas del modelo son el estado actual, $\mathbf{x}(k)$, y la señal de entrada, $u(k)$; y sus salidas son el valor siguiente del vector de estado, $\mathbf{x}(k + 1)$. Para la inicialización del modelo borroso se han empleado dos funciones de pertenencia gaussianas uniformemente distribuidas para cada una de las variables, generando un total de 8 reglas para cada una de las salidas del modelo borroso.

Para los valores con los que obtiene un mejor rendimiento, $[\alpha, \beta] = [10^{-2}, 10^{-3}]$, los errores en línea se muestran en las figuras 5 y 6. Los errores de los modelos finales obtenidos a partir de los datos de entrenamiento son mostrados en las figuras 7 y 8, y los errores de los modelos finales obtenidos a partir de los datos de validación se muestran en las figuras 9 y 10, respectivamente. La figura 11 muestra la salida del sistema y del modelo obtenido durante el modelado en línea, y finalmente, la figura 12 muestra la respuesta del modelo final para la entrada de validación.

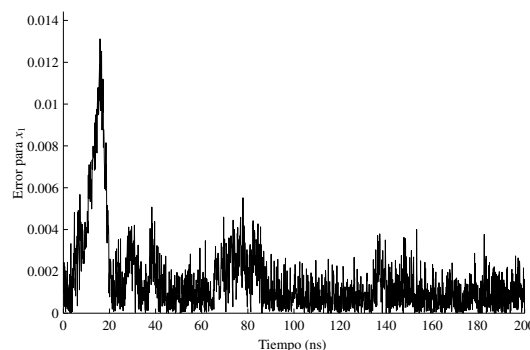


Figura 5: Evolución del error absoluto en línea de $x_1(k)$.

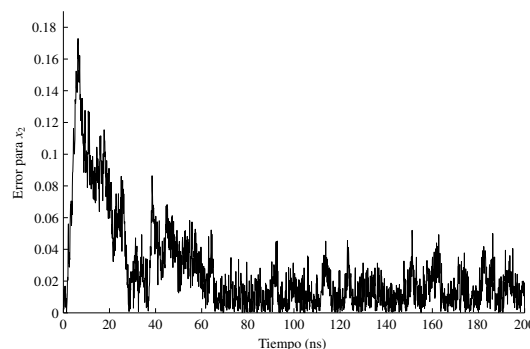


Figura 6: Evolución del error absoluto en línea de $x_2(k)$.

Este ejemplo muestra la ventaja de hibridar una técnica conocida, y ampliamente utilizada en el mundo del control, como es el filtro de Kalman, con la lógica borrosa. Como se observa en el ejemplo, el EKF es un excelente algoritmo de ajuste para los parámetros de un modelo borroso, ya que permite su adaptación en línea con el proceso y en presencia de un ruido significativo.

Tabla 1: Error cuadrático medio (RMSE) de cada prueba.

$[\alpha, \beta] =$	$[1e-3, 1e-1]$	$[1e1, 1e-2]$	$[1e3, 1e1]$	$[1e-2, 1e-3]$	$[1e2, 1e-4]$
RMSE para x_1	$6,495995e-03$	$2,291368e-02$	$1,330786e-02$	$6,685541e-03$	$1,776174e+04$
RMSE para x_2	$1,131838e-02$	$1,744776e-02$	$1,890073e-02$	$9,344264e-03$	$2,313962e+04$

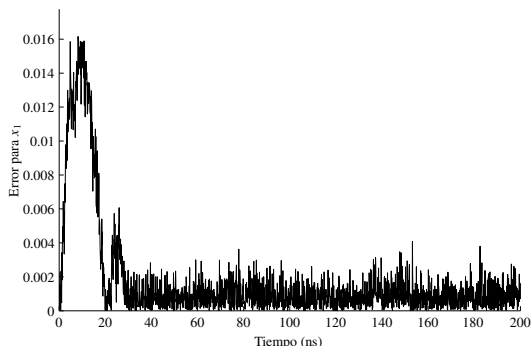


Figura 7: Error del modelo final para los datos de entrenamiento de $x_1(k)$.

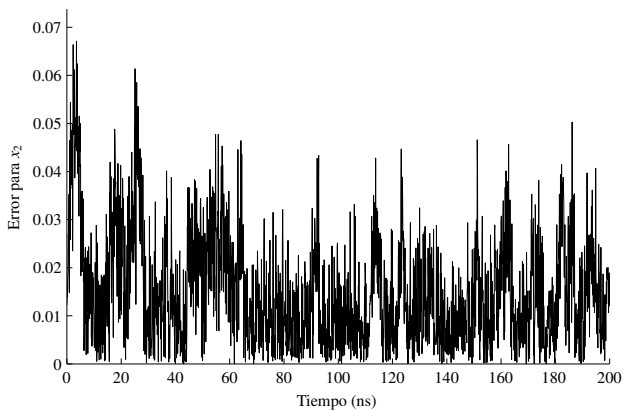


Figura 8: Error del modelo final para los datos de entrenamiento de $x_2(k)$.

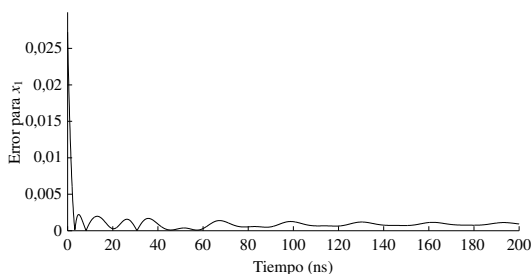


Figura 9: Error del modelo final para los datos de validación de $x_1(k)$.

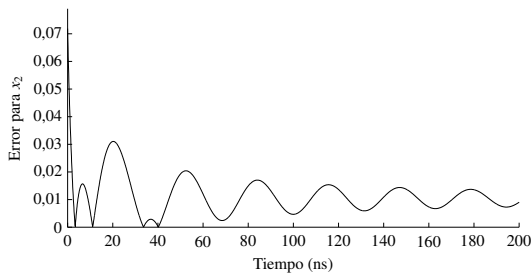


Figura 10: Error del modelo final para los datos de validación de $x_2(k)$.

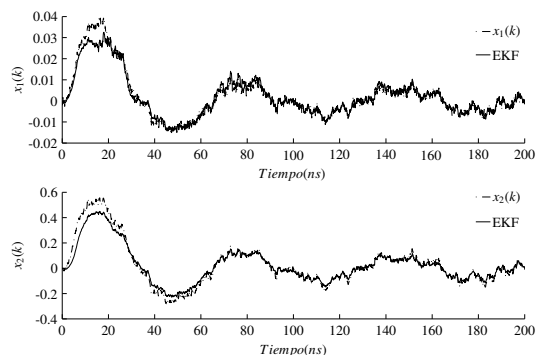


Figura 11: Respuesta del modelado en línea.

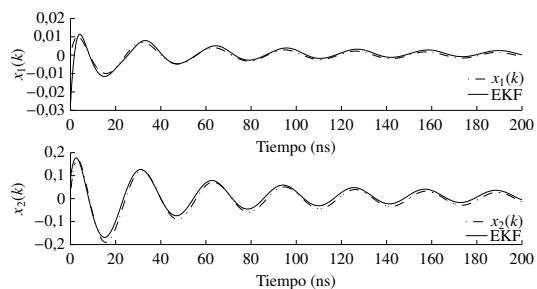


Figura 12: Respuesta del modelo final frente a la entrada de validación.

5.2. Análisis de sistemas dinámicos desconocidos mediante lógica borrosa

Una de las tareas fundamentales previas al diseño de un sistema de control, es estudiar la dinámica del sistema que se pretende controlar. Cuando el modelo matemático del sistema es desconocido, o éste es muy complejo y resulta prácticamente imposible obtener en base al análisis físico del mismo, la lógica borrosa se presenta como una herramienta muy poderosa de modelado y análisis. Puesto que un modelo borroso es un modelo matemático formalmente hablando, a partir del mismo es posible estudiar aspectos de la dinámica del sistema real que representa.

La búsqueda de los estados de equilibrio de un sistema de control es uno de los primeros problemas que se deben resolver para proceder con el estudio de su dinámica. Como análisis previo al diseño del sistema de control, la obtención de los estados de equilibrio proporciona una valiosa información sobre el comportamiento de éste, especialmente si se trata de un sistema no lineal, ya que estos puntos son candidatos ideales para el estudio de estos sistemas mediante técnicas de linealización. Una vez diseñado el controlador, la obtención de los estados de equilibrio del sistema realimentado puede ser útil para comprobar que el diseño se ha realizado adecuadamente, así como para poder aplicar análisis de estabilidad local a dichos estados.

Dado un modelo borroso de un sistema de tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (15)$$

donde $\mathbf{f}(\cdot)$ representa el modelo borroso del sistema, \mathbf{x} el vector de estado y \mathbf{u} el vector de control, es posible calcular los estados de equilibrio del sistema mediante la resolución de $\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}$ tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \mathbf{0}. \quad (16)$$

Para un sistema discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \quad (17)$$

Los estados de equilibrio del sistema se obtendrían mediante la resolución de $\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}$ tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \mathbf{x}_{eq}. \quad (18)$$

Al representar $\mathbf{f}(\cdot)$ un sistema no lineal, éste puede no tener ningún estado de equilibrio, puede tener cualquier número finito o infinito de ellos. Este hecho, junto con la propia complejidad de las ecuaciones que definen los sistemas no lineales, provoca que el cálculo de los estados de equilibrio de los sistemas borrosos puede convertirse en un problema de envergadura. Por lo tanto, para resolver el problema planteado se suelen emplear métodos numéricos, como los métodos de Newton (Dennis Jr., 1977, Dennis Jr. y Schnabel, 1996), el método *Line-Search* (Grippio et al., 1986) o el de Región de Confianza (Bultheau y Vial, 1983, Powell, 1984), o métodos de optimización basados en algoritmos bioinspirados, como los algoritmos genéticos.

La linealización es una de las técnicas más empleadas en el diseño de sistemas de control no lineales. Aunque es una técnica no muy recomendable en muchos casos, ya que se desprecian los efectos de las no linealidades de los sistemas controlados, sí que puede ser válida para controlar sistemas no muy complejos, o cuya dinámica sea conocida, en regiones donde su comportamiento sea aproximadamente lineal. Además de como método de control, la linealización puede emplearse para obtener información de un sistema no lineal. Es sabido que, con algunas salvedades, el comportamiento de un sistema no lineal en torno a un estado de equilibrio es muy similar al del sistema linealizado en torno a dicho estado (Nijmeijer y Schaft, 1990, Slotine y Li, 1991); por lo tanto, la linealización de un modelo borroso es una herramienta muy útil para obtener información del sistema modelado. La linealización exacta de un modelo TS completamente general puede consultarse en (Barragán, 2009, Andújar y Barragán, 2010).

De esta forma, a partir de un modelo borroso es posible obtener tanto los estados de equilibrio que posee el sistema en la región de validez de dicho modelo, como un estudio de la estabilidad local de los mismos, lo cual brinda una información tremendamente valiosa sobre el sistema real al ingeniero de control.

Por ejemplo, sea el péndulo de de la figura 13, donde $M = 1$ Kg es la masa del péndulo, $L = 0,5$ m es la longitud de la varilla, $g = 9,8$ m/s² la aceleración de la gravedad, $b = 0,5$

N/m/s el coeficiente de fricción viscosa, θ el ángulo que forma el péndulo con respecto a la vertical, y τ el par aplicado sobre éste. Este sistema puede ser modelado mediante el conjunto de reglas siguiente:

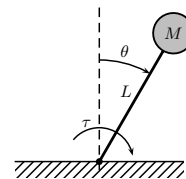


Figura 13: Péndulo.

SI x_1 es Trimf($-\infty;0;\infty$) y x_2 es Trimf($-\infty;0;\infty$) y τ es Trimf($-\infty;0;\infty$)

ENTONCES $\dot{x}_1 = x_2$

SI x_1 es Gaussmf(1,013;1,509) y x_2 es Gaussmf(1,123;10,06) y τ es Gaussmf(106,6;924,4)

ENTONCES $\dot{x}_2 = 0,9452 - 2,6*x_1 - 1,5*x_2 + 4,015*\tau$

SI x_1 es Gaussmf(1,463;0,9176) y x_2 es Gaussmf(-1,33;9,816) y τ es Gaussmf(-782,7;924,4)

ENTONCES $\dot{x}_2 = 65,57 - 2,805*x_1 - 1,403*x_2 + 4,038*\tau$

SI x_1 es Gaussmf(-0,876;0,8156) y x_2 es Gaussmf(8,382;12,32) y τ es Gaussmf(944,3;924,4)

ENTONCES $\dot{x}_2 = -31,73 - 0,4918*x_1 - 1,379*x_2 + 4,013*\tau$,

donde Trimf representa una función de pertenencia triangular cuyos parámetros son sus tres vértices, y Gaussmf una función de pertenencia gaussiana cuyos parámetros son el centro y el ancho respectivamente. Este modelo es válido para un universo de discurso de las variables de estado y control

$$X \subseteq \{\mathbf{x} \mid x_1 \in [-\pi, \pi], x_2 \in [-10, 10]\}, \quad (19)$$

$$U \subseteq \{\mathbf{u} \in [-10^3, 10^3]\}. \quad (20)$$

Tomando $\tau_{eq} = 0$, se pueden obtener numéricamente los 3 estados de equilibrio que presenta el sistema: $\mathbf{x}_{eq1} = (0, 0)^T$, $\mathbf{x}_{eq2} = (\pi, 0)^T$ y $\mathbf{x}_{eq3} = (-\pi, 0)^T$.

Al linealizar el modelo borroso en torno al estado de equilibrio \mathbf{x}_{eq1} , con $\tau_{eq1} = 0$, se obtiene el sistema lineal:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 17,931 & -1,953 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 4,003 \end{pmatrix} \bar{\tau}(t), \quad (21)$$

con $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq1}$ y $\bar{\tau} = \tau - \tau_{eq1}$, y cuyos autovalores son $\lambda_1 = 3,369$ y $\lambda_2 = -5,322$. Por lo tanto, se puede afirmar que el sistema es inestable en lazo abierto, y el estado de equilibrio se comporta como un punto de silla, como efectivamente sucede con el sistema real.

Si se procede ahora a linealizar el modelo borroso en torno al estado de equilibrio \mathbf{x}_{eq2} , con $\tau_{eq2} = 0$, se obtiene el sistema lineal:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16,161 & -1,808 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 4,004 \end{pmatrix} \bar{\tau}(t), \quad (22)$$

con $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq2}$ y $\bar{\tau} = \tau - \tau_{eq2}$, y cuyos autovalores son $\lambda_{1,2} = -0,904 \pm 3,917i$, lo que implica que el estado de equilibrio se comporta localmente como un foco estable, como efectivamente sucede.

Finalmente, si se procede a linealizar el modelo borroso en torno al estado de equilibrio \mathbf{x}_{eq3} , con $\tau_{eq3} = 0$, se obtiene el sistema lineal:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -21,847 & -2,073 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 4,001 \end{pmatrix} \bar{\tau}(t), \quad (23)$$

con $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq3}$ y $\bar{\tau} = \tau - \tau_{eq3}$, y cuyos autovalores son $\lambda_{1,2} = -1,036 \pm 4,558i$, lo que implica que, al igual que en el caso anterior, el estado de equilibrio se comporta localmente como un foco estable.

Como se ha mostrado en el presente ejemplo, la lógica borrosa se puede hibridar con las técnicas clásicas de análisis de sistemas para obtener información dinámica de utilidad de sistemas inicialmente desconocidos, lo que aporta un gran número de herramientas ya conocidas al ingeniero de control para el estudio de sistemas desconocidos o complejos.

5.3. Sistemas de control borroso estables por diseño

El problema del control de una planta está íntimamente ligado al concepto de estabilidad. Hasta tal punto están ligados dichos conceptos, que no tiene sentido hablar de sistema de control si éste no es estable. Cuando se desea diseñar un sistema de control para una planta no lineal es deseable, y a veces imprescindible, no realizar aproximaciones lineales de la misma, ya que la pérdida de información que esto supone puede provocar que el sistema resultante no sea estable o lo sea muy localmente.

Los sistemas no lineales presentan una gran riqueza en cuanto a sus respuestas dinámicas. Esta riqueza dificulta enormemente la consecución de una teoría que permita el diseño de sistemas de control de forma sistemática, tal como sucede con los sistemas lineales. No obstante, siempre y cuando el modelo matemático de la planta sea conocido, existen multitud de técnicas de control que pueden ser aplicadas para la síntesis de controladores no lineales, como la linealización por realimentación, la planificación de ganancias, el control adaptativo o el control deslizante, entre otras. Dada la capacidad inherente de los sistemas borrosos para modelar dinámicas no lineales, estas técnicas pueden emplearse para la síntesis de controladores borrosos como se comentó en el apartado 4.

La teoría de estabilidad de Lyapunov permite tanto el análisis de los sistemas de control no lineales, como la síntesis de controladores estables. En (Andújar et al., 2009) se propone el siguiente teorema con objeto de utilizar la teoría de Lyapunov para la resolución de problemas de mayor complejidad que los que pueden abordarse mediante técnicas clásicas:

Teorema 5.1. *Considérese el sistema autónomo general definido por:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (24)$$

donde el estado de equilibrio de interés se sitúa, sin pérdida de generalidad³, en el origen de coordenadas, y sean $s \in \mathbb{N}$ regiones Θ_q , con $q=1..s$, definidas en el espacio de estado mediante

³En el caso de que el estado de equilibrio no se sitúe en el origen de coordenadas, siempre será posible establecer un cambio de base del sistema de coordenadas que lo sitúe en dicha posición.

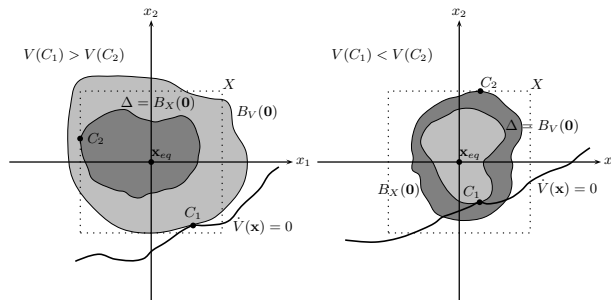


Figura 14: Región de atracción.

s funciones continuamente diferenciables $\varphi_q(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, tal que $\varphi_q(\mathbf{x}) \in C^1$. Sea $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ la matriz jacobiana del sistema (24). Una condición suficiente para que el origen sea asintóticamente estable es que existan s matrices simétricas definidas positivas, $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_s$, tal que $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, la matriz

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^s \left(\varphi_q(\mathbf{x}) (\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{P}_q + \mathbf{P}_q \mathbf{J}(\mathbf{x})) + \frac{d\varphi_q(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_q \right) \quad (25)$$

sea definida negativa en un entorno $B_V(\mathbf{0}) \subseteq \bigcup_{q=1}^s \Theta_q$ del origen de coordenadas. En este caso, la función

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \left(\sum_{q=1}^s \varphi_q(\mathbf{x}) \mathbf{P}_q \right) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (26)$$

es una función de Lyapunov del sistema (24). Además, si la región $B_V(\mathbf{0})$ es el espacio de estado completo y

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty, \quad (27)$$

entonces el sistema es asintóticamente estable de forma global.

Obviamente, si la dinámica de la planta sólo se conoce a través de su modelo borroso obtenido mediante datos de entrada/salida, en ningún caso será posible garantizar la estabilidad asintótica global del sistema, ya que se desconoce el comportamiento de éste fuera del universo de discurso de sus variables. Así pues, la estabilidad asintótica sólo podrá garantizarse para aquellas trayectorias que cumplan el teorema 5.1 y permanezcan íntegramente dentro del universo de discurso. Esto es:

Sea X el universo de discurso de las variables de estado y ∂X su borde, y sean $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$, de forma que $C_1 = \min\{V(\mathbf{x}) \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ y $C_2 = \min\{V(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \partial X\}$. Una estimación sobre la región de atracción Δ que contiene el estado de equilibrio situado en el origen, es aquella región contenida en el universo de discurso de las variables de estado, $\Delta \subseteq X$, en la que $V(\mathbf{x})$ se comporta como una función de Lyapunov y que satisface la ecuación (28). Esta condición puede verse gráficamente en la figura 14.

$$\Delta \subseteq \{\mathbf{x} \in X \mid V(\mathbf{x}) < \min\{C_1, C_2\}\} \quad (28)$$

Nótese que el signo menor estricto de la ecuación (28) implica que la región de atracción no incluye su propio borde. Esto

debe ser necesariamente así, ya que una trayectoria que se iniciase en el borde podría no converger hacia $x_e q$, por ejemplo, saliéndose del universo de discurso X .

En (Andújar et al., 2009) se presenta un algoritmo para la aplicación del teorema 5.1 para el diseño de controladores borrosos que garanticen la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Este algoritmo permite determinar un conjunto de parámetros adaptables del mismo, tanto antecedentes como consecuentes, y un conjunto de regiones Θ_q , de forma que $F(x)$ sea definida negativa en un entorno suficientemente amplio alrededor del origen.

Al aplicar la teoría de Lyapunov a través del teorema 5.1 se garantiza la generalidad de la metodología, ya que no se realizan linealizaciones ni simplificaciones de ningún tipo sobre el sistema, y la condición que se impone es lo suficientemente flexible como para que pueda ser satisfecha por sistemas complejos (Andújar et al., 2009).

Dado el ejemplo del péndulo invertido del apartado anterior, mediante la utilización del algoritmo presentado en (Andújar et al., 2009) se obtiene el siguiente controlador borroso para garantizar la estabilidad asintótica del sistema en torno al estado de equilibrio situado en el origen:

SI x_1 es $\text{Trimf}(-\infty;0;\infty)$ y x_2 es $\text{Trimf}(-\infty;0;\infty)$

ENTONCES $\tau = 5,353-7,417*x_1-1,85*x_2$

SI x_1 es $\text{Gaussmf}(1,013;1,509)$ y x_2 es $\text{Gaussmf}(1,123;10,06)$

ENTONCES $\tau = -8,169-0,4213*x_1-0,5807*x_2$

SI x_1 es $\text{Gaussmf}(1,463;0,9176)$ y x_2 es $\text{Gaussmf}(-1,33;9,816)$

ENTONCES $\tau = -20,31-3,055*x_1-2,173*x_2$

SI x_1 es $\text{Gaussmf}(-0,876;0,8156)$ y x_2 es $\text{Gaussmf}(8,382;12,32)$

ENTONCES $\tau = 4,055-0,9655*x_1+0,06538*x_2$

Las matrices $P_q, q = 1..4$, obtenidas durante la fase de diseño son:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,467 & 0,009 \\ 0,009 & 0,011 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,011 & 0 \\ 0 & 0,0109 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0,024 & 0 \\ 0 & 0,012 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 \\ 0,001 & 0,0352 \end{pmatrix}$$

En la figura 15 se puede observar la evolución del sistema diseñado partiendo de distintas condiciones iniciales. En dicha figura puede comprobarse que, efectivamente, todas las trayectorias que no abandonan el universo de discurso de las variables de estado tienden al estado de equilibrio situado en el origen. La estabilidad de aquellas trayectorias que abandonan el universo de discurso de las variables de estado, mostradas en trazo punteado, no puede garantizarse, ya que el modelo borroso de la planta no tiene porqué ser válido fuera del rango de valores para el que fue obtenido. Por lo tanto, al no ser posible garantizar el cumplimiento del teorema 5.1 para dichas trayectorias, no puede asegurarse formalmente su estabilidad.

6. Conclusiones

Desde que el profesor de teoría de sistemas de la Universidad de California (Berkeley), Lotfi A. Zadeh publicó su famoso

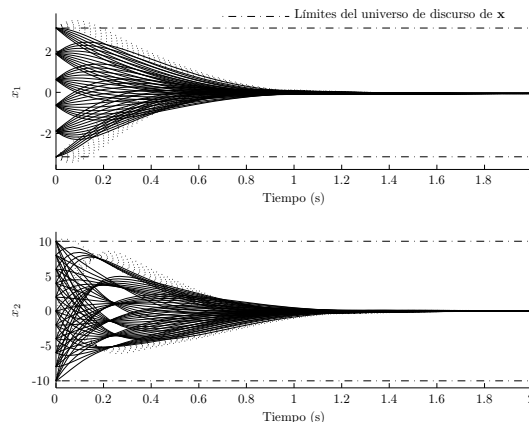


Figura 15: Simulación para distintas condiciones iniciales.

artículo *Fuzzy Sets*, la lógica borrosa ha conseguido en un breve periodo de tiempo revolucionar la tecnología e impulsar la inteligencia artificial mediante la conjunción de los fundamentos matemáticos, la lógica y el razonamiento. Desde que la lógica borrosa se hizo popular a nivel industrial, se comprobó que el desarrollo de un controlador borroso con un buen rendimiento no era una tarea fácil, fue entonces cuando comenzó a hibridarse el control borroso con una gran variedad de tecnologías también emergentes, como las redes neuronales o los algoritmos bioinspirados, dando lugar a sistemas híbridos. La creación de los sistemas borrosos híbridos y la fusión de la lógica borrosa con técnicas clásicas y modernas de control, ha propiciado que la lógica borrosa posea múltiples campos de aplicación en muy diversos ámbitos, y que a nivel de investigación sigan produciéndose avances y nuevas propuestas constantemente.

En este trabajo hemos realizado un somero recorrido sobre las técnicas de hibridación de sistemas de modelado y control borroso que, desde el punto de vista de los autores, aportan un mayor grado de complementariedad y valor añadido a las cualidades innatas de la lógica borrosa. Así, se ha tratado con cierta profundidad la hibridación de ésta con algoritmos procedentes de las redes neuronales, algoritmos bioinspirados, algoritmos del análisis numérico y algoritmos basados en el filtro de Kalman como paradigma de herramienta de uso extendido en la Ingeniería de Control.

No obstante lo anterior, a lo largo del trabajo han sido mencionadas otras técnicas de hibridación presentes en la literatura. En general, el objetivo de los autores ha sido no hacer innecesariamente extenso este tutorial, de modo que se ha presentado especial cuidado en presentar una amplia bibliografía, con objeto de que el lector interesado pueda profundizar en el vasto campo de las técnicas de hibridación de sistemas de modelado y control borroso.

El artículo finaliza con tres ejemplos de naturaleza muy diferente, tanto en los sistemas en sí como en los objetivos de modelado y control, que pretenden ilustrar de modo práctico algunas de las técnicas de hibridación tratadas. Estos ejemplos muestran como las capacidades inherentes de la lógica borrosa pueden ser potenciadas de forma notable trabajando de forma

conjunta con paradigmas tanto del control más clásico (léase filtro de Kalman o algoritmos numéricos por ejemplo), como del que se da en denominar Control inteligente, donde las técnicas de la inteligencia artificial son aplicadas a la resolución de problemas de la ingeniería de control.

Como colofón de este artículo podríamos extraer quizás dos lecturas fundamentales: (1) la adecuada hibridación de la lógica borrosa con otras técnicas potencia sus cualidades de modelado y control creando sinergia, en el sentido que el resultado final es superior al obtenido con cada técnica actuando por separado; y (2), no cabe establecer supremacías de unas técnicas sobre otras en un sentido absoluto, sino intentar conocer cuantas más mejor para saber la de aplicación más idónea en cada caso.

English Summary

Hybridization of fuzzy systems for modeling and control

Abstract

Fuzzy logic has revolutionized, in a short period of time, the technology through a combination of mathematical fundamentals, logic and reasoning. Its inherent hybridization ability and intrinsic robustness, have allowed to fuzzy logic get numerous successes in the field of modeling and control of systems, impulsing the intelligent control. In this paper, the more usual hybrid fuzzy systems and its importance in the field of modeling and control of dynamic systems are studied. The paper presents several examples that illustrate, for different hybridization techniques, how these enhance the innate qualities of fuzzy logic for modeling and control of dynamic systems. Also, more than a hundred and fifty references are included, which allow the interested reader to delve into the field of fuzzy logic, and more specifically, in its hybridization techniques with application to modeling and fuzzy control.

Keywords:

Bioinspired algorithms fuzzy control fuzzy modeling fuzzy systems hybrid systems intelligent control neuronal networks

Agradecimientos

Este artículo es una contribución del proyecto DPI2010-17123 financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad, y del proyecto TEP-6124 financiado por la Junta de Andalucía. Ambos proyectos están cofinanciados con fondos FEDER.

Referencias

Al-Hadithi, B. M., Barragán, A. J., Andújar, J. M., Jiménez, A., Oct. 2013. Variable structure control with chattering elimination and guaranteed stability for a generalized t-s model. *Applied Soft Computing* 13 (12), 4802–4812. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2013.07.026>
Al-Hadithi, B. M., Matía, F., Jiménez, A., Apr. 2007. Análisis de estabilidad de sistemas borrosos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 4 (2), 7–25.

Albertos, P., Sala, A., Jul. 2004. Control borroso. Una metodología integradora. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 1 (2), 22–31.
Altrock, C. v., 1994. Fuzzy logic technologies in automotive engineering. En: *Embedded systems conference*. Vol. 2. pp. 407–422.
Altrock, C. v., Krause, B., Zimmermann, H. J., 1992. Advanced fuzzy logic control technologies in automotive applications. En: *IEEE Conference on Fuzzy Systems*. pp. 831–842.
Anderson, J. A., Silverstein, J. W., Ritz, S. A., Jones, R. S., Sep. 1977. Distinctive features, categorical perception, and probability learning: some applications of a neural model. *Psychological Review* 84 (5), 413–451. DOI: [10.1037/0033-295X.84.5.413](https://doi.org/10.1037/0033-295X.84.5.413)
Andújar, J. M., Aroba, J., Torre, M. L. d. l., Grande, J. A., Jan. 2006a. Contrast of evolution models for agricultural contaminants in ground waters by means of fuzzy logic and data mining. *Environmental Geology* 49 (3), 458–466. DOI: [10.1007/s00254-005-0103-2](https://doi.org/10.1007/s00254-005-0103-2)
Andújar, J. M., Barragán, A. J., Sep. 2005. A methodology to design stable nonlinear fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems* 154 (2), 157–181. DOI: [10.1016/j.fss.2005.03.006](https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.03.006)
Andújar, J. M., Barragán, A. J., Jul. 2010. A formal methodology for the analysis and design of nonlinear fuzzy control systems. En: *Fuzzy Systems (FUZZ)*, 2010 IEEE International Conference on. No. 1. Barcelona, Spain, pp. 66–74. DOI: [10.1109/FUZZY.2010.5583980](https://doi.org/10.1109/FUZZY.2010.5583980)
Andújar, J. M., Barragán, A. J., Córdoba, J. M., Fernández, I., Jan. 2006b. Diseño de sistemas de control borroso: modelado de la planta. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 3 (1), 75–81.
Andújar, J. M., Barragán, A. J., Gegúndez, M. E., Oct. 2009. A general and formal methodology for designing stable nonlinear fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 17 (5), 1081–1091. DOI: [10.1109/TFUZZ.2009.2021984](https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2009.2021984)
Andújar, J. M., Barragán, A. J., Gegúndez, M. E., Maestre, M., 2007. Control borroso multivariable basado en heurística. un caso práctico: Grúa porta contenedores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 4 (2), 81–89+123.
Andújar, J. M., Bravo, J. M., Mar. 2005. Multivariable fuzzy control applied to the physical-chemical treatment facility of a cellulose factory. *Fuzzy Sets and Systems* 150 (3), 475–492. DOI: [10.1016/j.fss.2004.03.023](https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.03.023)
Andújar, J. M., Bravo, J. M., Peregrín, A., Dec. 2004. Stability analysis and synthesis of multivariable fuzzy systems using interval arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems* 148 (3), 337–353. DOI: [10.1016/issn=0165-0114/j.fss.2004.01.008](https://doi.org/10.1016/issn=0165-0114/j.fss.2004.01.008)
Angelov, P., Buswell, R., Oct. 2002. Identification of evolving fuzzy rule-based models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 10 (5), 667–677. DOI: [10.1109/TFUZZ.2002.803499](https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2002.803499)
Angelov, P., Xydeas, C., Filev, D., July 2004. On-line identification of MIMO evolving Takagi–Sugeno fuzzy models. En: *Fuzzy Systems, 2004. Proceedings. 2004 IEEE International Conference on*. Vol. 1. pp. 55–60. DOI: [10.1109/FUZZY.2004.1375687](https://doi.org/10.1109/FUZZY.2004.1375687)
Angelov, P. P., 2002. Evolving Rule-Based Models: A Tool for Design of Flexible Adaptive Systems. Vol. 92 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Physica-Verlag, Springer, New York.
Angelov, P. P., Filev, D. P., Feb. 2004. An approach to online identification of Takagi–Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics* 34 (1), 484–498. DOI: [10.1109/TSMCB.2003.817053](https://doi.org/10.1109/TSMCB.2003.817053)
Aracil, J., 2000. *Stability Issues in Fuzzy Control*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA.
Aracil, J., Ollero, A., Garcia-Cerezo, A., Sep. 1989. Stability indices for the global analysis of expert control systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 19 (5), 998–1007. DOI: [10.1109/21.44014](https://doi.org/10.1109/21.44014)
Aroba, J., Grande, J. A., Andújar, J. M., De La Torre, M. L., Riquelme, J. C., Sep. 2007. Application of fuzzy logic and data mining techniques as tools for qualitative interpretation of acid mine drainage processes. *Environmental Geology* 53 (1), 135–145. DOI: [10.1007/s00254-006-0627-0](https://doi.org/10.1007/s00254-006-0627-0)
Assilian, S., 1974. *Artificial intelligence in the control of real dynamical systems*. Ph.D. thesis, Queen Mary College, London University.
Babuška, R., Mar. 1995. Fuzzy modeling – a control engineering perspective.

- ve. En: Proceedings of FUZZ-IEEE/IFES'95. Vol. 4. Yokohama, Japan, pp. 1897–1902.
DOI: 10.1109/FUZZY.1995.409939
- Barragán, A. J., 2009. Síntesis de sistemas de control borroso estables por diseño. Universidad de Huelva.
URL: <http://uhu.es/antonio.barragan/thesis>
- Barragán, A. J., Al-Hadithi, B. M., Jiménez, A., Andújar, J. M., 2013. A general methodology for online TS fuzzy modeling by the extended kalman filter. Applied Soft Computing, in-press.
DOI: 10.1016/j.asoc.2013.09.005
- Baumann, B., Washington, G., Glenn, B., Rizzoni, G., Mar. 2000. Mechatronic design and control of hybrid electric vehicles. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics 5 (1), 58–72.
DOI: 10.1109/3516.828590
- Bellman, R. E., Zadeh, L. A., Dec. 1970. Decision-making in a fuzzy environment. Management Science 17 (4), B141–B164.
- Berenji, H. R., Khedkar, P., Sep. 1992. Learning and tuning fuzzy logic controllers through reinforcements. IEEE Transactions on Neural Networks 3 (5), 724–740.
DOI: 10.1109/72.159061
- Bezdek, J. C., Dunn, J. C., Aug. 1975. Optimal fuzzy partitions: A heuristic for estimating the parameters in a mixture of normal distributions. IEEE Transactions on Computers C-24 (8), 835–838.
- Bezdek, J. C., Ehrlich, R., Full, W. E., 1984. FCM: The fuzzy c-means clustering algorithm. Computers and Geosciences 10 (2-3), 191–203.
DOI: 10.1016/0098-3004(84)90020-7
- Bonissone, P. P., Chen, Y. H., Goebel, K. F., Khedkar, P. S., 1999. Hybrid soft computing systems: Industrial and commercial applications. Proceedings of the IEEE 87 (9), 1641–1667.
DOI: 10.1109/5.784245
- Bravo, J. M., Sánchez, O., Andújar, J. M., Fernández, E., 2002. Stability analysis and synthesis of fuzzy systems using interval arithmetic. En: 2002, E. S. L. (Ed.), 15th IFAC World Congress. No. 15. Barcelona, Spain, pp. 79–79.
DOI: 10.1016/j.fss.2004.01.008
- Bulteau, J., Vial, J., Feb. 1983. Curvilinear path and trust region in unconstrained optimization: a convergence analysis. Mathematical Programming Study 1, 82–101.
- Cao, Y. Y., Frank, P. M., Apr. 2000. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8 (2), 200–211.
DOI: 10.1109/91.842153
- Chen, O. T., Lu, Y.-C., Chang, H.-T., 1995. Fuzzy reasoning processor for camera image autofocus. En: Wu, L. T. (Ed.), Visual Communications and Image Processing '95. Vol. 2501. SPIE, pp. 347–354.
DOI: 10.1117/12.206740
- Cherry, A., Jones, R., Mar. 1995. Fuzzy logic control of an automotive suspension system. En: IEE Proceedings: Control Theory and Applications. IEE, Stevenage, United Kingdom, pp. 149–160.
DOI: 10.1049/ip-cta:19951736
- Chiu, S., 1994. Fuzzy model identification based on cluster estimation. En: Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. Vol. 2, pp. 267–278.
- Chua, L. O., Desoer, C. A., Kuh, E. S., 1987. Linear and nonlinear circuits. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering: Circuits and systems. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Cordón, O., Gomide, F., Herrera, F., Hoffmann, F., Magdalena, L., Jan. 2004. Ten years of genetic fuzzy systems: Current framework and new trends. Fuzzy Sets and Systems 141 (1), 5–31.
DOI: 10.1016/S0165-0114(03)00111-8
- Cordón, O., Herrera, F., Lozano, M., 1995. A classified review on the combination fuzzy logic-genetic algorithms bibliography. Tech. Rep. DECSAI-95129, Dept. of Computer Science and A.I., University of Granada.
- Denaí, M. A., Palis, F., Zeghib, A. H., Jun. 2007. Modeling and control of nonlinear systems using soft computing techniques. Applied Soft Computing 7 (3), 728–738.
DOI: 10.1016/j.asoc.2005.12.005
- Dennis Jr., J., 1977. Nonlinear least-squares. State of the art in numerical analysis. Academic Press, pp. 269–312.
- Dennis Jr., J., Schnabel, R. B., 1996. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Vol. 16 of Classics in Applied Mathematics. Soc for Industrial & Applied Math.
- Dorigo, M., Di Caro, G., Gambardella, L. M., 1999. Ant algorithms for discrete optimization. Artificial Life 5 (2), 137–172.
DOI: 10.1162/106454699568728
- Dorigo, M., Maniezzo, V., Colomi, A., Feb. 1996. Ant system: Optimization by a colony of cooperating agents. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics 26 (1), 29–41.
DOI: 10.1109/3477.484436
- Driankov, D., Hellendoorn, H., Reinfrank, M., 1993. An introduction to fuzzy control. Springer-Verlag, New York, USA.
- Dunn, J. C., 1973. A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters. Journal of Cybernetics 3, 32–57.
- Feng, G., Cao, S. G., Rees, N. W., Oct. 2002. Stable adaptive control of fuzzy dynamic systems. Fuzzy Sets and Systems 131 (2), 217–224.
DOI: 10.1016/S0165-0114(01)00236-6
- Ferrer, J., Rodrigo, M. A., Seco, A., Penya-roja, J. M., 1998. Energy saving in the aeration process by fuzzy logic control. Water Science and Technology 38 (3), 209–217.
DOI: 10.1016/S0273-1223(98)00463-6
- Freeman, J. A., Skapura, D. M., 1991. Neural networks: algorithms, applications, and programming techniques. Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., Redwood City, CA, USA.
- Gajate, A., 2010. Modelado y control neuroborroso de sistemas complejos. Aplicación a procesos de mecanizado de alto rendimiento. Ph.D. thesis, Dpto. de Informática Industrial, Centro de Automática y Robótica (CSIC-UPM).
- Gajate, A., Haber, R. E., Jan. 2009. Networked neurofuzzy control. An application to a drilling process. RIAI - Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial 6 (1), 31–38+127.
- Goguen, J. A., Apr. 1969. The logic of inexact concepts. Synthese 19 (3-4), 325–373.
DOI: 10.1007/BF00485654
- Grande, J. A., Andújar, J. M., Aroba, J., De La Torre, M. L., Beltrán, R., Apr. 2005. Precipitation, pH and metal load in AMD river basins: An application of fuzzy clustering algorithms to the process characterization. Journal of Environmental Monitoring 7 (4), 325–334.
DOI: 10.1039/b410795k
- Grewal, M. S., Andrews, A. P., 2001. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB, 2nd Edición. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Grippo, L., Lampariello, F., Lucidi, S., 1986. A nonmonotone line search technique for newton's method. SIAM Journal on Numerical Analysis 23 (4), 707–716.
DOI: 10.1137/0723046
- Grossberg, S., 1987. Competitive learning: from interactive activation to adaptive resonance. Cognitive Science 11 (1), 23–63.
DOI: 10.1016/S0364-0213(87)80025-3
- Gupta, M., 2000. Soft Computing and Intelligent Systems. Theory and Applications. Academic Press, Hamilton, Ontario, Canada.
- Han, Y. F., Shi, P., Jan. 2007. An improved ant colony algorithm for fuzzy clustering in image segmentation. Neurocomputing 70 (4-6), 665–671.
DOI: 10.1016/j.neucom.2006.10.022
- Haruki, T., Kikuchi, K., Aug. 1992. Video camera system using fuzzy logic. IEEE Transactions on Consumer Electronics 38 (3), 624–634.
DOI: 10.1109/30.156746
- Hayashi, I., Takagi, H., May 1988. Formulation of fuzzy reasoning by neural network (in japanese). En: IFSA Japan. pp. 55–60.
- Hofbauer, P., Arend, H. O., Pfannstiel, D., 1993. New heating systems controls based on the use of fuzzy logic. En: First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies. Aachen, pp. 1036–1042.
- Hopfield, J. J., Apr. 1982. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 79 (8), 2554–2558.
- Horikawa, S.-I., Furuhashi, T., Uchikawa, Y., Sep. 1992. On fuzzy modeling using fuzzy neural networks with the back-propagation algorithm. IEEE Transactions on Neural Networks 3 (5), 801–806.
DOI: 10.1109/72.159069
- Jang, J.-S., 1992. Neuro-fuzzy modeling: architectures, analyses, and applications. Ph.D. thesis, University of California, Berkeley.
- Jang, J.-S. R., 1991. Fuzzy modeling using generalized neural networks and kalman filter algorithm. AAAI'91, Proceedings of the ninth National conference on Artificial intelligence 91, 762–767.

- Jang, J.-S. R., May 1993. ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 23 (3), 665–685. DOI: 10.1109/21.256541
- Jang, J.-S. R., Sun, C.-T., Mar. 1995. Neuro-fuzzy modeling and control. *Proceedings of the IEEE* 83 (3), 378–406. DOI: 10.1109/5.364486
- Jensen, R. P., Shen, Q., Jan. 2005. Fuzzy-rough data reduction with ant colony optimization. *Fuzzy Sets and Systems* 149 (1), 5–20. DOI: 10.1016/j.fss.2004.07.014
- Jiang, T., Li, Y. T., Aug. 1996. Generalized defuzzification strategies and their parameter learning procedures. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 4 (1), 64–71. DOI: 10.1109/91.481845
- Jiménez, A., Aroba, J., de la Torre, M. L. d. l., Andújar, J. M., Grande, J. A., 2009. Model of behaviour of conductivity versus pH in acid mine drainage water, based on fuzzy logic and data mining techniques. *Journal of Hydroinformatics* 2 (11), 147–153. DOI: 10.2166/hydro.2009.015
- Juang, C. F., Lu, C. M., Lo, C., Wang, C. Y., Mar. 2008. Ant colony optimization algorithm for fuzzy controller design and its fpga implementation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 55 (3), 1453–1462. DOI: 10.1109/TIE.2007.909762
- Kalman, R. E., 1960. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions on ASME-Journal of Basic Engineering* 82 (series D), 35–45.
- Karr, C. L., Jul. 1991. Design of an adaptive fuzzy logic controller using a genetic algorithm. En: 4th International Conference on Genetic Algorithms, ICGA'91. Morgan Kaufmann, San Diego, CA, USA, pp. 450–457.
- Karr, C. L., Freeman, L. M., Meredith, D. L., Nov. 1989. Improved fuzzy process control of spacecraft autonomous rendezvous using a genetic algorithm. En: *SPIE Conf. on Intelligent Control and Adaptive Systems*. Vol. 1196, pp. 274–283. URL: <http://dx.doi.org/10.1117/12.969926> DOI: 10.1117/12.969926
- Kim, H. M., Dickerson, J., Kosko, B., Dec. 1996. Fuzzy throttle and brake control for platoons of smart cars. *Fuzzy Sets and Systems* 84 (3), 209–234. DOI: 10.1016/issn = 0165-0114,0165-0114(95)00326-6
- Kohonen, T., 1988. *Self Organization and Associative Memory*. Springer Series in Information Sciences. Springer London, Limited.
- Kosko, B., Nov. 1994. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Computers* 43 (11), 1329–1333. DOI: 10.1109/12.324566
- Lakoff, G., Oct. 1973. Hedges: A study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts. *Journal of Philosophical Logic* 2 (4), 458–508. DOI: 10.1007/BF00262952
- Layne, J. R., Passino, K. M., Yurkovich, S., Jun. 1993. Fuzzy learning control for antiskid braking systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 1 (2), 122–129. DOI: 10.1109/87.238405
- LeCun, Y., 1985. Une procédure d'apprentissage pour reseau a seuil symetrique (in french). *Cognitiva*. CESTA, Paris, France 85, 599–604.
- Lee, H.-D., Sul, S.-K., Aug. 1998. Fuzzy-logic-based torque control strategy for parallel-type hybrid electric vehicle. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 45 (4), 625–632. DOI: 10.1109/41.704891
- Lee, Y., Zak, S., Apr. 2002. Designing a genetic neural fuzzy antilock-brake-system controller. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 6 (2), 198–211. DOI: 10.1109/4235.996019
- Lennon, W. K., Passino, K. M., Mar. 1999. Intelligent control for brake systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 7 (2), 188–202. DOI: 10.1109/87.748145
- Li, Y., Yonezawa, Y., 1991. Stability analysis of fuzzy control systems by the hyperstability theorem. *Japanese journal of fuzzy theory and systems* 3 (2), 209–214.
- Liang, W., John, Y., Feb. 1999. Extracting fuzzy rules for system modeling using a hybrid of genetic algorithms and Kalman filter. *Fuzzy Sets and Systems* 101 (3), 353–362. DOI: 10.1016/S0165-0114(97)00098-5
- Lin, C.-F., Wang, S.-D., Mar. 2002. Fuzzy support vector machines. *IEEE Transactions on Neural Networks* 13 (2), 464–471. DOI: 10.1109/72.991432
- Lin, C.-T., Lee, C., Dec. 1991. Neural-network-based fuzzy logic control and decision system. *IEEE Transactions on Computers* 40 (12), 1320–1336. DOI: 10.1109/12.106218
- Lin, H.-R., Wang, W.-J., Nov. 1998. L₂-stabilization design for fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems* 100 (1-3), 159–172. DOI: 10.1016/S0165-0114(97)00131-0
- López-Baldán, M. J., García-Cerezo, A., Cejudo, J. M., Romero, A., Apr. 2002. Fuzzy modeling of a thermal solar plant. *International Journal of Intelligent Systems* 17 (4), 369–379. DOI: 10.1002/int.10026
- Lughofer, E. D., Dec. 2008. FLEXFIS: A robust incremental learning approach for evolving Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 16 (6), 1393–1410. DOI: 10.1109/TFUZZ.2008.925908
- Maeda, M., Murakami, S., 1991. Stability analysis of fuzzy control systems using phase planes. En: *Japanese journal of fuzzy theory and systems*. Vol. 3, pp. 149–160.
- Malki, H. A., Li, H., Chen, G., Nov. 1994. New design and stability analysis of fuzzy proportional-derivative control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 2 (4), 245–254. DOI: 10.1109/91.324804
- Mamdani, E. H., Dec. 1974. Application of fuzzy algorithms for control of a simple dynamic plant. *Proceedings of the IEEE* 121 (12), 1585–1588. DOI: 10.1049/piee.1974.0328
- Mamdani, E. H., Dec. 1977. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. *IEEE Transactions on Computers* C-26 (12), 1182–1191. DOI: 10.1109/TC.1977.1674779
- Mamdani, E. H., Assilian, S., 1975. An experimental in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies* 7 (1), 1–13.
- Mauer, G. F., Nov. 1995. Fuzzy logic controller for an ABS braking system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 3 (4), 381–388. DOI: 10.1109/91.481947
- Maybeck, P. S., 1979. *Stochastic models, estimation, and control*. Vol. 141 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 11 Fifth Avenue, New York.
- McCulloch, W. S., Pitts, W., 1943. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The bulletin of mathematical biophysics* 5 (4), 115–133. DOI: 10.1007/BF02478259
- Meseguer, J., Sols, I., 1975. Automata in semimodule categories. En: *Proceedings of the First International Symposium on Category Theory Applied to Computation and Control*. Springer-Verlag, London, UK, pp. 193–198.
- Mościński, J., Ogonowski, Z., 1995. *Advanced control with MATLAB and SIMULINK*. Ellis Horwood, Upper Saddle River, NJ, USA.
- Mudi, R., Pal, N., Feb. 1999. A robust self-tuning scheme for PI- and PD-type fuzzy controllers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 7 (1), 2–16. DOI: 10.1109/91.746295
- Negoita, C. V., 1969. *Information retrieval systems*. Ph.D. thesis, Polytechnical Institute, Bucharest, Romania.
- Negoita, C. V., 1974. *Fuzzy systems and artificial intelligence*. *Cybernetes* 3, 173–178.
- Nguyen, H. T., Sugeno, M., Tong, R. M., Yager, R. R., 1995. *Theoretical aspects of fuzzy control*. John Wiley Sons, New York, NY, USA.
- Nijmeijer, H., Schaft, A. v. d., 1990. *Nonlinear dynamical control systems*. Springer Verlag, Berlin.
- Nomura, H., Hayashi, I., Wakami, N., 1993. A self-tuning method of fuzzy inference rules by descent method. En: Lowen, R., Roubens, M. (Eds.), *Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 465–475.
- Parker, D., 1985. *Learning logic*. Tech. Rep. TR-47, Center for Computational Res. Econ. Manage. Sci. Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, MA.
- Piegat, A., 1997. Hyperstability of fuzzy-control systems and degrees of freedom. En: *5th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing, EUFIT'97*. Vol. 2, pp. 1446–1450.
- Piegat, A., 2001. *Fuzzy modeling and control*. Springer-Verlag Company, Heidelberg-New York.
- Pok, Y.-M., Xu, J.-X., Jun. 1994. Why is fuzzy control robust? En: *Fuzzy Systems, 1994*. IEEE World Congress on Computational Intelligence., Proceedings of the Third IEEE Conference on. Vol. 2, Orlando, FL, pp. 1018–1022. DOI: 10.1109/FUZZY.1994.343875

- Powell, M., Aug. 1984. On the global convergence of trust region algorithms for unconstrained minimization. *Mathematical Programming* 29 (3), 297–303.
DOI: 10.1007/BF02591998
- Ramaswamy, P., Riese, M., Edwards, R. M., Lee, K. Y., Dec. 1993. Two approaches for automating the tuning process of fuzzy logic controllers. En: 32nd IEEE Conference on Decision and Control. Part 2 (of 4). San Antonio, TX, USA.
DOI: 10.1109/CDC.1993.325490
- Rao, M.V.C. adn Prahlad, V., Jan. 1997. A tunable fuzzy logic controller for vehicle-active suspension systems. *Fuzzy Sets and Systems* 85 (1), 11–21.
DOI: 10.1016/0165-0114(95)00369-X
- Rosenblatt, F., 1958. The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review* 65 (6), 386–408.
- Rosenblatt, F., 1962. Principles of neurodynamics: perceptrons and the theory of brain mechanisms. Report (Cornell Aeronautical Laboratory). Spartan Books.
- Sala, A., Ariño, C., Apr. 2009. Reduciendo distancias entre el control borroso y el control no lineal: luces y sombras. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 6 (2), 26–35.
- Santos, M., Oct. 2011. Un enfoque aplicado del control inteligente. *RIAI - Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 8 (4), 283–296.
DOI: 10.1016/j.riai.2011.09.016
- Santos, M., Dormido, S., de la Cruz, J. M., 1996. Fuzzy-PID controllers vs. fuzzy-PI controllers. En: 5th IEEE International Conference on Fuzzy Systems FUZZ-IEEE'96, pp. 1598–1604.
DOI: 10.1109/FUZZY.1996.552571
- Schouten, N., Salman, M., Kheir, N., May 2002. Fuzzy logic control for parallel hybrid vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 10 (3), 460–468.
DOI: 10.1109/87.998036
- Simon, D., 2002. Training fuzzy systems with the extended Kalman filter. *Fuzzy Sets and Systems* 132 (2), 189–199.
DOI: 10.1016/S0165-0114(01)00241-X
- Slotine, J.-J. E., Li, W., 1991. Applied nonlinear control. Prentice-Hall, NJ.
- Smith, R. E., 1970. Measure theory on fuzzy sets. Ph.D. thesis, Dept. of Mathematics, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada.
- Sols, I., 1975. Aportaciones a la teoría de topos, al álgebra universal y a las matemáticas fuzzy. Ph.D. thesis, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España.
- Steinmüller, H., Wick, O., 1993. Fuzzy and neurofuzzy applications in european washing machines. En: First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies, EUFIT'93. Aachen, pp. 1031–1035.
- Sugeno, M., 1974. Theory of fuzzy integrals and its applications. Ph.D. thesis, Tokyo Institute of Technology.
- Sugeno, M., Yasukawa, T., Feb. 1993. Fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 1 (1), 7–31.
DOI: 10.1109/TFUZZ.1993.390281
- Takagi, H., 1995. Industrial Applications of Fuzzy Control and Intelligent Systems. IEEE Press, Piscataway, NJ, USA.
- Takagi, H., Apr. 1996. Industrial and commercial applications of nn/fs/ga/chaos in 1990s. En: International Workshop on Soft Computing in Industry (IWS-CI'96). Muroran, Hokkaido, Japan, pp. 160–165.
- Takagi, H., Hayashi, I., May 1991. NN-driven fuzzy reasoning. *International Journal of Approximate Reasoning* 5 (3), 191–212.
- Tanaka, K., Ikeda, T., Wang, H. O., May 1998. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 6 (2), 250–265.
DOI: 10.1109/91.669023
- Tanaka, K., Sugeno, M., Jan. 1992. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems* 45 (2), 135–156.
DOI: 10.1016/0165-0114(92)90113-I
- Tanaka, K., Wang, H. O., 2001. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. AWiley-Interscience publication. Wiley.
- Tang, K., Man, K. F., Chen, G., Kwong, S., Aug. 2001. An optimal fuzzy PID controller. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 48 (4), 757–765.
DOI: 10.1109/41.937407
- Vachtsevanos, G., Farinwata, S., Pirovolou, D., Jun. 1993. Fuzzy logic control of an automotive engine. *IEEE Control Systems Magazine* 13 (3), 62–68.
DOI: 10.1109/37.214946
- Vélez, M. A., Sánchez, O., Romero, S., Manuel, A. J., Mar. 2010. A new methodology to improve interpretability in neuro-fuzzy TSK models. *Applied Soft Computing* 10 (2), 578–591.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2009.08.027>
- Wang, H. O., Tanaka, K., Griffin, M. F., Feb. 1996. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 4 (1), 14–23.
DOI: 10.1109/91.481841
- Wang, L., Langari, R., 1994. Fuzzy controller design via hyperstability approach. En: IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Vol. 1. pp. 178–182.
DOI: 10.1109/FUZZY.1994.343696
- Wang, L.-X., 1992. Fuzzy systems are universal approximators. En: IEEE International Conference on Fuzzy Systems. San Diego, CA, USA, pp. 1163–1170.
DOI: 10.1109/FUZZY.1992.258721
- Wang, L. X., 1994. Adaptive fuzzy systems and control. Prentice Hall, New Jersey.
- Wang, L.-X., 1997. A course in fuzzy systems and control. Prentice Hall, New Jersey, USA.
- Wang, L.-X., Mendel, J. M., Mar. 1992. Back-propagation fuzzy system as nonlinear dynamic system identifiers. En: Fuzzy Systems, 1992, IEEE International Conference on. pp. 1409–1418.
DOI: 10.1109/FUZZY.1992.258711
- Werbos, P., 1974. Beyond regression: new tools for prediction and analysis in the behavioral sciences. Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge, MA.
- Widrow, B., 1959. Adaptive sampled-data systems, a statistical theory of adaptation. En: IRE WESCON Convention Record. Part 4. Institute of Radio Engineers, New York.
- Widrow, B., Hoff, M. E., 1989. Adaptive switching circuits. En: Wescon Conference Record. pp. 709–717.
- Won, J.-S., Langari, R., Feb. 2002. Fuzzy torque distribution control for a parallel hybrid vehicle. *Expert Systems* 19 (1), 4–10.
DOI: 10.1111/1468-0394.00184
- Xie, X. L., Beni, G., Aug. 1991. A validity measure for fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13 (8), 841–847.
DOI: 10.1109/34.85677
- Yen, J., Langari, R., 1999. Fuzzy Logic: Intelligence, control, and information. Prentice Hall.
- Ying, H., Jul. 1998. Sufficient conditions on uniform approximation of multivariate functions by general Takagi–Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part A: Systems and Humans* 28 (4), 515–520.
DOI: 10.1109/3468.686713
- Ying, H., Siler, W., Buckley, J. J., May 1990. Fuzzy control theory: A nonlinear case. *Automatica* 26 (3), 513–520.
DOI: 10.1016/0005-1098(90)90022-A
- Yongman, L., Seong-Ik, J., Keewook, C., Dongyun, L., Wonchan, K., Choong-Woong, L., May 1994. Fuzzy-control processor for automatic focusing. *IEEE Transactions on Consumer Electronics* 40 (2), 138–144.
DOI: 10.1109/30.286408
- Zadeh, L. A., May 1962. From circuit theory to system theory. En: Proceedings of th Institute of Radio Engineers. Vol. 50. pp. 856–865.
DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288302
- Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. *Information and Control* 8 (3), 338–353.
- Zadeh, L. A., Jan. 1973. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 3, 28–44.
DOI: 10.1109/TSMC.1973.5408575
- Zeng, K., Zhang, N.-Y., Xu, W.-L., Dec. 2000. A comparative study on sufficient conditions for Takagi–Sugeno fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 8 (6), 773–780.
DOI: 10.1109/91.890337
- Zhao, Z.-Y., Tomizuka, M., Isaka, S., Sep. 1993. Fuzzy gain scheduling of PID controllers. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 23 (5), 1392–1398.
DOI: 10.1109/21.260670
- Zimmermann, H. J., 1976. Description and optimization of fuzzy systems. *International Journal of General Systems* 2, 209–215.